In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful













LOIS USUELLES

LOIS DISCRETES

LOI UNIFORME

DEFINITION

- X est une loi uniforme sur son ensemble E fini $E = \{x_1, x_2, \dots, x_3\}$
- X suite une loi uniforme $\Leftrightarrow P(X = xi) = \frac{1}{|E|} \forall x_i \in E$

CAS PARTICULIER :

- X suit une loi uniforme sur son ensemble fini $E = \{1, 2, \dots, n\} \Leftrightarrow P(X = k) = \frac{1}{n} \forall k = \overline{1, n}.$

ESPERANCE

- $E(X) = \sum_1^n k.P(X = k) = \sum_{k=1}^n k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k$
- $E(X) = n + \frac{1}{2}$

VARIANCE

- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

LOI DE BERNOULLI

MODELISATION

- Soit E => Ω = {S, E} => S = succès, E = échec.
- On pose $Ж = \begin{Bmatrix} 1 \text{ } si \text{ } S \\ 0 \text{ } si \text{ } E \end{Bmatrix}; S \cap E = \emptyset; P(S) + P(E) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ binôme de Newton = $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$

DEFINITION

- X ~> B(p) sachant que 0 < p < 1 ⇔
- $\begin{cases} Ж = \{0,1) \\ P(x = 1) = P(S) = p \\ P(x = 0) = P(E) = 1 - p \end{cases}$

ESPERANCE ET VARIANCE

- $E(X) = p\,; V(X) = p \times q$

LOI BINOMIALE

MODELISATION

- Soit E une épreuve de Bernoulli. On répète E de façon indépendante n fois, c-à-d, $p = P(S)$ reste inchangée au cours des n répétitions : donc tirages successifs avec remise ou grande population.

DEFINITION

- X~>B(n,p) 0 < p < 1 ⇔ $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

PROBABILITES

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilités ⇔ $\sum_{k \in Ж} k = 1$
- $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = [p + (1 - p)]^n = 1$

PROPOSITION

- Soit $(X_i)_{i=\overline{1,n}}\ iid$
- X_i ~> B(p) $\forall\, i = \overline{1, n}$
- X_i indep. => $\sum_{i=0}^{n} X_i$~> B(n,p)

EXEMPLE

$n = 4, E = lancer 1\ pièce\ 4\ fois\ , S = \text{face}$
$1ère\ fois: E_1 \rightarrow face = S;\ X_1 = 1$
$2ème\ fois: E_1 \rightarrow pile = S;\ X_1 = 0$
$3ème\ fois: E_1 \rightarrow pile = S;\ X_1 = 0$
$4ème\ fois: E_1 \rightarrow face = S;\ X_1 = 1$

ESPERANCE ET VARIANCE

- On sait que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$; X_i ~> B(p)
- X ~> B(n,p) => $E(X_i) = np\,; V(X_i) = npq$

LOI HYPERGEOMETRIQUE

MODELISATION

- Expérience de Bernoulli répétée n fois possibles et non indépendantes donc tirages sans remise.
- X nombre de succès obtenus

DEFINITION

- X ~> $H(N, n, p)$
- N : taille de la pop
  n : taille de l'ech
  p : P(S)
- $P(X = k) = \frac{C_{Np}^{k} C_{N(n-k)}^{n-k}}{C_N^n}$

LOI DE POISSON

DEFINITION

- X ~> P(λ) ; $\lambda > 0$ ⇔
- $\begin{cases} Ж = \mathbb{N} \\ P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \end{cases}$

MODELISATION

- La loi de poisson est souvent liée en temps
  Ex : le nombre d'appels reçus à un service d'urgence en 22h et 22h30
- Ou encore à une capacité
  Ex : Nb de bactéries dans un volume d'eau

ESPERANCE ET VARIANCE

- X ~> P(λ) ⇔ E(X) = V(X) = λ

PROPOSITION

- La moyenne est proportionnelle au temps

RELATION DE RECURRENCE

- $P(X = 0) = e^{-\lambda}$
- $P(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1}[P(x = k)] \; \forall \, k \geq 0$

DEMONSTRATION

- $P(x = k+1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$

$$P(x = k+1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k \times \lambda}{k! \times (k+1)}$$

$$P(X = k+1) = \frac{\lambda}{k+1}[P(x = k)]$$

APPROXIMATION DE LA BINOMIALE PAR LA POISSON

- La loi de Poisson régit les phénomènes rares comme les maladies génétiques

EXEMPLE

- X = n'enfants ayant une certaine maladie rare sur n enfants examinés.
- X ~> B(n,p)
- On montre que si $n \to \infty$ => cette Binomiale est approximée par une P(λ) où $\lambda = \mathrm{np}$

DANS LA PRATIQUE

- $B(n,p) \approx \mathrm{P}(\lambda) \begin{cases} n \to +\infty \approx n \geq 50 \\ P \leq 10\% \\ np \leq 10 \end{cases}$